Ligninger med en ubekendt

I dette kapitel kommer du til at lære om en ny metode til at løse ligninger (og isolere variable). Metoden kaldes **udpakningsmetoden**. Efter en introduktion til, **hvordan** metoden virker, ser vi på, **hvorfor** metoden virker. Derefter bruger vi metoden til at løse alle de ligninger, du støder på i gymnasiet.

Introduktion til metoden 1

Hvorfor en ny metode til at løse ligninger? 1.1

I folkeskolen har du lært at løse ligninger ved at gøre det samme på begge sider af lighedstegnet. Den vil i det følgende blive kaldt **den klassiske metode**. Det er en udmærket metode, der kan bruges til at løse mange ligninger. I gymnasiet vil du imidlertid støde på ligninger, som den ikke kan løse. Der er derfor brug for en ny metode. Det er dog ikke sådan, at du bare skal glemme den klassiske metode; den kan være nyttig til at lave de første omskrivninger, før man kan komme i gang med den nye metode.
Der er fire grunde til at du skal lære om udpakningsmetoden:

Den virker altid 1.1.1

Det første eksempel på ligninger, som den klassiske metode ikke kan løse er andengradsligninger. Prøv for eksempel at løse følgende andengradsligning:

$$x^2 = 4.$$

Du vil sandsynligvis 'tage kvadratroden på begge sider' (i den tro, at ▶ $\sqrt{x^2} = x$) og på den måde komme frem til løsningen $x = 2$. Det er korrekt, at $x = 2$ er en løsning, men det er ikke den eneste! $x = -2$ er nemlig også en løsning. Du vil måske nu indvende, at den kunne du da finde ved at 'tage minus kvadratroden på begge sider'. Gør du det, kommer du frem til $-x = -2$, hvilket igen giver løsningen $x = 2$. Den klassiske metode kan altså ikke løse alle ligninger.

I afsnittet 'Alle ligninger er forklædte simple ligninger' ser vi, hvordan udpakningsmetoden sammen med en mere præcis udgave af den klassiske metode kan bruges til at løse alle ligninger.

Den er matematisk korrekt 1.1.2

Hvis man kun tænker på ligningsløsning som 'man må gøre det samme på begge sider', risikerer man at løbe ind i problemer. Det er for eksempel ikke tilladt at 'sætte i anden' eller 'tage sinus' på begge sider. Læs om hvorfor her. Med udpakningsmetoden gør vi kun ting, der er matematisk korrekte.

Den er lettere at bruge 1.1.3

Den klassiske metode kræver, at du arbejder med begge sider af ligningen på en gang i hvert skridt. Med udpakningsmetoden arbejder man med en side af gangen.

Den giver struktur 1.1.4

Ved brug af udpakningsmetoden finder vi en løsningsstrategi, der virker for alle ligninger, vi skal kunne løse; fra simple førstegradsligninger til komplicerede differentialligninger. Vi kan altså tænke på samme måde, hver gang vi skal løse en ligning.

Tankelæsningsopgaver - en god måde at tænke på ligninger 1.2

Før vi går i gang med at løse ligninger, ser vi på, hvordan man kan løse såkaldte 'tankelæsningsopgaver'.

Hvad er en tankelæsningsopgave? 1.2.1

Definition: (***Tankelæsningsopgave***)

Du har bedt en anden om at tænke på et tal. Derefter har du bedt ham om at gøre noget ved hans tal. Opgaven er at **finde ud af hvilket tal han tænkte på**.

Øvelse

Du har bedt ham om følgende:

'Gang dit tal med 2 og læg 1 til. Fortæl mig derefter dit resultat'.

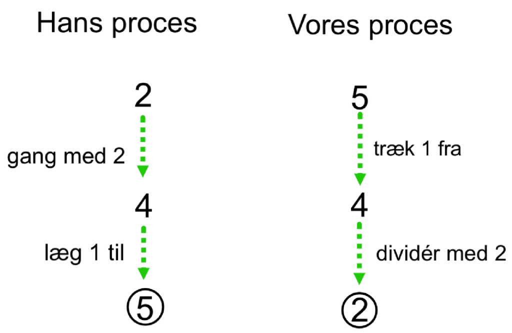
Lad os sige, han fik resultatet 5. Hvilket tal tænkte han på?

Løsning

For at finde hans hemmelige tal, gør du følgende:
Du ved, at det sidste, han gjorde, før han fik resultatet 5, var at lægge 1 til. Før han lagde 1 til, må han altså have haft $5 - 1 = 4$.
Før han lagde 1 til, gangede han med 2. Det fik han 4 ud af. Men så må han jo have haft $4/2 = 2$ før han gangede med to.
Han tænkte altså på 2!

Struktur på løsning af tankelæsningsopgaver 1.2.2

Vi lægger mærke til følgende struktur i vores løsning af øvelsen i sidste afsnit:



Det giver anledning til at tænke på tankelæsningsopgaver på følgende måde: Hans proces svarer til en **indpakning**. Hver gang han gør et eller andet ved sit resultat, tilføjer han et lag. Vores opgave er at **pakke hans hemmelige tal ud**. Det gør vi ved at fjerne et lag ad gangen ved at **gøre det modsatte** af, hvad han gjorde.

Vores metode kan altså skrives meget kort:

> **Gør det modsatte i modsat rækkefølge.**

Som vi skal se i næste afsnit, så er det netop essensen af udpakningsmetoden: At forestille sig, at den ubekendte er blevet udsat for en process (en indpakning) og derefter at udsætte resultatet for den omvendte proces (udpakning) ved at gøre det modsatte i modsat rækkefølge ved resultatet.

Vi ser altså, at hvis vi har styr på følgende fire ting, så kan vi løse en hver tankelæsningsopgave:

1. De enkelte lag. (Lag 1: 'gang med 2' og lag 2: 'læg 1 til')
2. Rækkefølgen hvori lagene blev påført. (Først lag 1, så lag 2)
3. Resultatet af indpakningen. (5)
4. Hvordan vi fjerner hvert lag. (Lag 1: 'divider med 2' og lag 2: 'træk 1 fra')

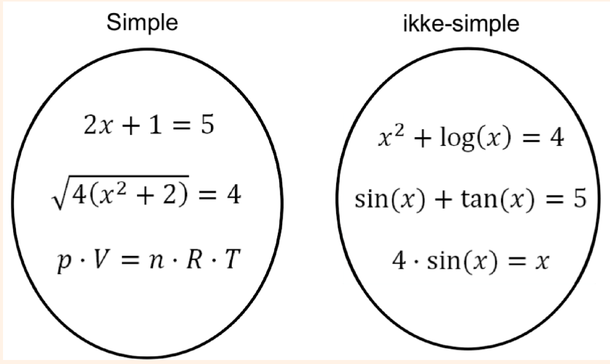
Løsning af simple ligninger med udpakningsmetoden 1.3

Hvad er simple ligninger? 1.3.1

Vi skal nu se, hvad tankeløsningsopgaver har med ligningsløsning at gøre. Vi starter med at begrænse os til en bestemt type ligninger. Inspireret af Frank Villas MatBog, kalder vi dem 'simple ligninger':

> **D e f i n i t i o n :**
>
> En ***simpel*** ligning er en ligning, hvor den ubekendte kun optræder en gang.

> **Eksempel:**



Der er to meget gode grunde til at vi indfører begrebet 'simpel ligning':

1. Hver gang du i gymnasiet bliver bedt om at løse en ligning eller isolere en ubekendt, er der tale om en (evt. forklædt) simpel ligning.
2. De simple ligninger er netop de ligninger, der kan løses med udpakningsmetoden.

Hvordan skal jeg tænke? 1.3.2

For at løse en simpel ligning opfatter vi den som en tankelæsningsopgave:

Vi tænker på den ubekendte, vi er interesserede i (lad os kalde den x), som det hemmelige tal, vi ønsker at bestemme.

Vi spørger så os selv:

1. Hvad er der sket med x?
2. I hvilken rækkefølge er det sket?
3. Hvad blev resultatet?
4. Hvordan fjerner jeg de enkelte lag?

Svarene på de fire spørgsmål er netop de fire ting, vi skal kende for at bestemme vores x og dermed løse ligningen.

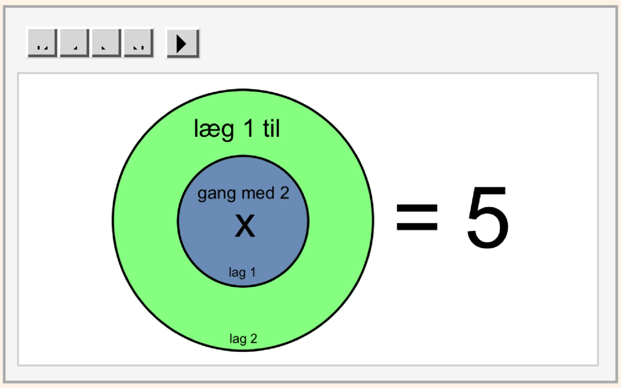
Eksempel:

Vi ser på ligningen $2x + 1 = 5$ og besvarer de fire spørgsmål.

1. Der er blevet ganget med 2 og der er blevet lagt 1 til.
2. Rækkefølgen finder vi ved brug af regnearternes hierarki:
   Først ganges x med 2 og bagefter lægges 1 til.
3. Resultatet er 5.
4. Det yderste lag fjernes ved at trække 1 fra og det inderste ved at dividere med 2.

Bemærk, at den eneste forskel mellem dette eksempel og eksemplet på en løsning af en tankelæsningsopgave er trin 2: Vi skal selv finde ud af i hvilken rækkefølge de forskellige lag er blevet påført ved brug af regnearternes hierarki.

Vi er altså kommet frem til følgende løsningsmetode:



Bemærk, at vi kun regner på højresiden. På venstresiden fjerner vi lag. Den pointe bliver mere klar i næste afsnit, hvor vi skal se en smartere måde at opskrive ligningsløsning ved brug af udpakningsmetoden.

Hvordan skal jeg skrive? 1.3.3

Illustrationen i sidste afsnit viser, hvordan du skal tænke på ligningsløsning, men den er ikke ret praktisk, når man for eksempel skal løse en ligning i en aflevering eller præsentere et bevis. Til det formål er følgende notation nyttig:

$$\begin{array}{ccc}
2x+1 & = & 5 \\
{\scriptstyle +1}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle -1} \\
2x & = & 4 \\
{\scriptstyle \cdot\, 2}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle /\, 2} \\
x & = & 2
\end{array}$$

Sidste trin i udpakningen er at gøre det modsatte af at gange med 2.

Bemærk, at hvis du fjerner pilene, så står der en løsning, der er identisk med den, du ville lave med den klassiske metode.

Liste over omvendte operationer 1.3.4

For at finde ud af hvilken proces den ubekendte har været udsat for (altså indpakningen) har vi kun brug for regneartern es hirarki. For at kunne lave udpakningen har vi brug for at kende de omvendte operationer til alle de operationer, der indgår i indpakningen. Nedenfor er en liste over alle de operationer, du vil møde i gymnasiet, og deres omvendte. Bemærk, at skemaet skal læses begge veje: Den omvendte operation af en omvendt operation er bare operationen selv. Du skal derfor **lede i begge søjler**, når du leder efter en operation.

Operation	**Omvendt operation**	**Navn / kommentar**
$+$	$-$	
$\cdot$	$/$	
$\frac{1}{\cdot}$	$\frac{1}{\cdot}$	Reciprok værdi
$-\,\cdot$	$-\,\cdot$	Fortegnsskift
$\cdot^2$	$\pm\sqrt{\cdot}$	Finder alle løsninger
$\lvert\cdot\rvert$	$\pm\,\cdot$	
$\cdot^a$	$\sqrt[a]{\cdot}$	$\cdot$ må ikke være negativ
$a^{\cdot}$	$\log_a \cdot$	
f	f^{-1}	For alle funktioner, f, specielt **sin**, **cos** og **tan**
$(\cdot)'$	$\int$	Finder kun løsnings – **funktioner**

Typiske problemer 1.3.5

-x indgår

Noget, mange elever har svært ved, er, når den **ubekendte bliver trukket fra**. For 'så er det jo ikke x, man gør noget ved'... eller hvad?

Ideen er at bruge vores definition af minus: Vi opfatter minus som et fortegnsskift efterfulgt af en addition.

Vi ser på et eksempel:

$$\mathbf{4 - x = 5}$$

Ideen er her, at ligningen kan læses på følgende måde:

$$4 + (-x) = 5$$

Nu er det nemlig let at få øje på indpakningen:

> **Inderste lag:** Skift fortegn.
> **Yderste lag:** Læg 4 til.

Udpakningen er derfor også let ved brug af tabellen i sidste afsnit:

> Først trækker vi 4 fra 5. Det giver 1.
> Så skifter vi fortegn. Det giver -1.

Ligningens løsning er derfor: $\boldsymbol{x = -1}$.

***x* står i nævneren**

Noget andet, der ofte driller elever, er, når **den ubekendte står i nævneren**.

Ideen er at bruge vores definition af division: Vi opfatter division som reciprok værdi efterfulgt af en multiplikation.

Vi ser på et eksempel:

$$\frac{a+b}{x} = c$$

Vi ser på ligningen på følgende måde:

$$(a+b)\cdot\frac{1}{x} = c$$

Nu er lagene lette at få øje på:

> **Inderste lag:** Reciprok værdi.
> **Yderste lag:** Gang med $(a + b)$.

Udpakningen er derfor også let:

> Først dividerer vi c med $(a + b)$. Det giver $\frac{c}{a+b}$.
> Så bestemmer vi den reciprokke værdi af $\frac{c}{a+b}$. Det giver $\frac{a+b}{c}$.

Vi har altså løst ligningen (eller isoleret x, om man vil) og fået $x = \frac{a+b}{c}$.

Øvelser 1.3.6

Brug udpakningsmetoden til at løse følgende ligninger:

1. $3x+4 = 13$ ▶ Løsning
2. $2(x+1) = 4$ ▶ Løsning
3. $\sqrt{3x+4} = 4$ ▶ Løsning
4. $9-x = 3$ ▶ Løsning
5. $\frac{3+\pi}{x} = 2$ ▶ Løsning

Forklædte simple ligninger 1.4

Hvad er en forklædt simpel ligning? 1.4.1

Definition 3:

En ***forklædt*** simpel ligning er en ligning, der kan skrives om til en simpel ligning.

Eksempler:

$$2x+3x = 10, \qquad ax+bx = c, \qquad \frac{x+1}{x} = 2.$$

Løsning af forklædte simple ligninger 1.4.2

For at løse en forklædt simpel ligning er vores strategi altid den samme:

> 1. Find en regneregel eller flere, der kan **omskrive ligningen til en simpel ligning**.
> 2. Løs den simple ligning ved brug af udpakningsmetoden.

Det er naturligvis det første skridt, der er det vanskeligste. Man kan ikke skrive en generel regel op for hvordan man skal gøre. Det er et spørgsmål om træning. Jo flere gange man har set det gjort og gjort det selv, jo bedre bliver man til se, hvad der skal til. Nedenfor er der et par eksempler. Efter en forklaring af, hvorfor metoden virker, er pointen med resten af kapitlet at se, hvordan vi kan løse forskellige forklædte simple ligninger.

▶ **Eksempler**

Opgaver

1.5

1. Løs følgende ligninger:
   - **a.** $3x+2=11$ ▶ Facit
   - **b.** $2x-3=11$ ▶ Facit
   - **c.** $2x^2+2=20$ ▶ Facit
   - **d.** $2-x=5$ ▶ Facit
2. Isolér x i følgende ligninger:
   - **a.** $ax+b=c$ ▶ Facit
   - **b.** $(a+b)x=c$ ▶ Facit
   - **c.** $\frac{a}{x}=b$ ▶ Facit
   - **d.** $a(x+h)^2+k=0$ ▶ Facit
3. Isolér variablen med **fed**:
   - **a.** $c=\frac{\mathbf{n}}{V}$ ▶ Facit
   - **b.** $E_{\text{kin}}=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ ▶ Facit
   - **c.** $M=\frac{m}{\mathbf{n}}$ ▶ Facit
   - **d.** $m_1\mathbf{v}+m_2\mathbf{v}=P$ ▶ Facit
   - **e.** $v=\frac{\lambda}{\mathbf{T}}$ ▶ Facit
   - **f.** $E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$ ▶ Facit

Hvorfor virker metoden?

2

Hvad vil det sige at løse en ligning?

2.1

Løsningsmængder

2.1.1

For at løse en ligning, fx 2x+1=5, så skal man finde mængden af (reelle) tal, der opfylder ligningen, altså:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1=5\}.$$

▶ symbolforklaring

Denne mængde kaldes ligningens **løsningsmængde**:

D e f i n i t i o n :

En lignings løsningsmængde er mængden af de tal/punkter/funktioner, der opfylder ligningen.

Det forklarer, hvorfor man kalder $y=2x+1$ for **ligningen** for en linje og $y=x^2+2x+3$ for **ligningen** for en parabel: De to ligninger har netop følgende løsningsmænger:

$$\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=2x+1\} \text{ og}$$

$$\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y=x^2+2x+3\right\},$$

som, når de tegnes ind i et koordinatsystem, er hhv. en ret linje og en parabel.

Løsning af ligninger

2.1.2

Når man 'løser en ligning', finder man en mængde på formen:

$$\{\text{løsning}_1,\ \text{løsning}_2,\ \dots,\ \text{løsning}_n\},$$

som er **den samme mængde** som løsningsmængden.

Eksempel: Løsningen til ligningen $2x+1=5$ er $x=2$, fordi:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1=5\} = \{2\}.$$

Hvordan viser man, at to mængder er ens?

2.1.3

For at løse en ligning, skal vi altså vise, at to mængder er ens. Men hvordan gør man det?

Man bruger følgende tilsyneladende trivielle definition:

Definition: To mængder er ens, hvis de har de samme elementer.

Vi skal altså vise, at hvis et element tilhører den ene mængde, så tilhører det også den anden mængde og omvendt. Med symboler:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Eksempler:

1. For at vise, at løsningen til ligningen $2x+1=5$ er $x=2$, skal vi altså bevise, at

$$x \in \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1=5\} \Leftrightarrow x \in \{2\}.$$

Men det er jo bare en kompliceret måde at skrive

$$2x+1=5 \Leftrightarrow x=2$$

på.

2. For at bevise, at ligningen $x^2=4$ har løsningerne $x=-2$ og $x=2$, skal vi bevise, at

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2=4\} = \{-2, 2\}.$$

Det svarer til at vise,
at

$$x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2\,.$$

Konklusion

2.1.4

For at løse en ligning, skal man lave en **kæde af ensbetydende ligninger**, der starter med den ligning, man ønsker at løse og slutter med en ligning på formen:

$$x = \text{løsning}_1,\; x = \text{løsning}_2,\; \dots,\; x = \text{løsning}_n\,.$$

Eksempler:

$$\begin{array}{|c|c|}
2x+1=5 & \\
\Updownarrow & x^2=4 \\
2x=4 & \Updownarrow \\
\Updownarrow & x=-2 \vee x=2 \\
x=2 &
\end{array}$$

Hvorfor er ⇒ eller ⇐ ikke nok?

2.1.5

I sidste afsnit så vi, at det at løse ligninger kræver, at vi beviser, at en masse ligninger er **ensbetydende**. I dette afsnit ser vi, hvorfor det er nødvendigt, at pilen går begge veje.

Hvis man kun viser, at pilen gælder den ene vej, viser man kun et af følgende udsagn:

ligning $\Rightarrow$ $x = \text{løsning}_1,\; x = \text{løsning}_2,\; \dots,\; x = \text{løsning}_n$:

Det viser, at løsningsmængden er en **delmængde** af $\{\text{løsning}_1, \text{løsning}_2, \dots, \text{løsning}_n\}$.

For eksempel er $2x+1=4 \Rightarrow x=0 \vee x=2$ korrekt, men løser ikke ligningen. Det siger kun at løsningerne er at finde blandt 0 og 2 - ikke om de begge er løsninger.

Man finder altså nogle **mulige løsninger**, men man ved ikke, hvilke der faktisk er løsninger.

ligning $\Leftarrow$ x = løsning$_1$, x = løsning$_2$, ... , x = løsning$_n$:

Det viser, at {løsning$_1$, løsning$_2$, ... , løsning$_n$} er en **delmængde** af løsningsmængden.

For eksempel er $x^2 = 4 \Leftarrow x = 2$ korrekt, men løser ikke ligningen. Det siger kun at 2 er en løsning - ikke at det er alle løsninger.

Man finder altså **nogle løsninger**, men man ved ikke, om det er alle løsninger.

Hvornår er to ligninger ensbetydende? 2.2

I sidste afsnit så vi, at det at løse ligninger kræver, at vi beviser, at en masse ligninger er **ensbetydende**. I dette afsnit ser vi på, hvornår vi kan slutte, at to ligninger er ensbetydende.

Vi har to regler, der gør det muligt for os at slutte, at to ligninger er ensbetydende:

Slutningsregel 1 2.2.1

Regel 1:

Lad f være en funktion, som har en **invers funktion**. Så gælder:

$$V = H \Leftrightarrow f(V) = f(H)$$

Bevis for regel 1

Regel 1 er korrekt på grund af vores definition af funktioner: Hvis man putter det samme tal ind i en funktion flere gange, så får man altid det samme ud. Det viser, at

$$\textbf{hvis } V = H, \textbf{ så } f(V) = f(H).$$

Den anden vej er sand, fordi f per antagelse har en invers, f^{-1}. For da f^{-1} er en funktion, gælder:

$$\textbf{Hvis } f(V) = f(H), \textbf{ så } V = f^{-1}(f(V)) = f^{-1}(f(H)) = H.$$

Regel 1 er en præcis formulering af:

'Man må gøre det samme på begge sider'.

Bemærk antagelsen! Den betyder for eksempel, at **følgende er forbudt**:

‘sætte i anden på begge sider’,

‘tage sinus på begge sider’.

Man må altså kun gøre noget på begge sider, hvis man kan **fjerne det igen**. Det kan man heldigvis med de fleste ting, vi kan finde på at gøre.

Det sikreste er at holde sig til de fire regnearter:

Man må lægge til, trække fra, gange og dividere på begge sider, hvis blot man ikke ganger eller dividerer med 0.

Øvelse

Bevis, at det er sandt.

▶ Hint

▶ Løsning

Slutningsregel 2 2.2.2

Regel 2:

Lad f være en funktion og f^{-1} være dens urbillede. Så gælder:

$$f(V) = H \Leftrightarrow V \in f^{-1}(H)$$

Bevis for regel 2

Regel 2 er korrekt på grund af vores definition af urbilleder: Et element (tal), V, ligger i urbilledet af et andet, H, under f **hvis og kun hvis** det giver H, når det indsættes i f. Med symboler:

$$V \in f^{-1}(H) \quad \Leftrightarrow \quad f(V) = H.$$

Med ord siger regel 2:

'Man kan fjerne noget på den ene side, hvis man gør det modsatte på den anden side.'

Dette er essensen i udpakningsmetoden!

Bemærk manglen på antagelser. **Det virker for alle funktioner!**

$$\begin{array}{ccc} & f(V) = H & \\ f\uparrow & & \downarrow f^{-1} \\ & V \in f^{-1}(H) & \end{array}$$

Alle ligninger er forklædte simple ligninger 2.3

Lad $V = H$ være en ligning. Ifølge regel 1 er:

$$V = H \quad \Leftrightarrow \quad V - H = 0.$$

$V - H$ er en funktion af den ubekendte. Lad os kalde den ubekendte x og funktionen f. Så er:

$$V - H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0.$$

Vores oprindelige ligning er altså ensbetydende med den simple ligning $f(x) = 0$ og **derfor en forklædt simpel ligning!**

Hvis vi kendte alle funktioners urbilleder, ville vi altså kunne løse alle ligninger i to trin:

1. Brug regel 1 til at trække højresiden fra på begge sider.

2. Brug regel 2 til at pakke x ud.

Andengradsligninger 3

Vi starter dette afsnit med at få begreberne '**standardform**' og '**løsningsformel**' på plads. Begreberne illustreres ved brug af førstegradsligninger. Vi går derefter i gang med vores egentlige mål, nemlig at løse andengradsligninger og at bestemme en løsningsformel til formålet. Vi ser først, hvordan man kan tænke sig frem til formlen uden på forhånd at kende den og bagefter, hvordan man let kan bevise formlen, hvis man allerede kender den.

Hvad er en standardform og en løsningsformel? 3.1

Standardform 3.1.1

Vi starter som sagt med at se på førstegradsligninger:

Definition: En ***førstegradsligning*** er en ligning, som kan skrives på formen

$$ax + b = 0,\ a \neq 0.$$

$ax + b = 0$ kaldes ***standardformen*** for førstegradsligninger.

Eksempel: Eksempler på førstegradsligninger:

$$2x + 1 = 5, \quad 4x = 3x - 1, \quad \frac{2x - 2}{4} = 7.$$

Løsningsformel 3.1.2

Førstegradsligninger er altså forklædte simple ligninger. Dem ved vi altså hvordan vi løser. Så hvorfor skal vi beskæftige os med førstegradsligninger? Det skal vi, fordi vi bruger dem til at illustrere, hvad det er, vi vil opnå med andengradsligninger: Selvom vi kan omskrive alle førstegradsligninger til standardformen og derefter løse dem ved udpakning, så gider vi ikke gøre det hver gang. I stedet vil vi udlede en **løsningsformel**, der gør det lettere og hurtigere at løse dem. Ideen er at gennemføre udpakningen for alle førstegradsligninger på en gang!

Med en løsningsformel menes:

Definition: En ***løsningsformel*** for en ligningstype er en ligning på formen:

$$x = \dots$$

hvor x ikke indgår på højresiden og som er ensbetydende med standardformen for ligningstypen.

Vi finder løsningsformlen for lineære ligninger ved at bruge udpakningsmetoden på standardformen:

$$\begin{array}{rcl} ax + b & = & 0 \\ {\scriptstyle +b}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle -b} \\ ax & = & -b \\ {\scriptstyle \cdot a}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle /a} \\ x & = & -b/a \end{array}$$

Bemærk, at vi gerne må dividere med a i andet trin i udpakningen, fordi $a \neq 0$ per definition af førstegradsligninger.

Bemærk desuden, at den nederste ligning $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$ opfylder kravene i definitionen og derfor er en løsningsformel.

Vi har altså nu bevist følgende sætning:

Sætning 1: Løsningsformlen for førstegradsligninger er:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Skal man løse en førstegradsligning, skal man altså bare skrive den på standardformen, aflæse a og b og indsætte dem i løsningsformlen.

Eksempel

Vi løser ligningen $2x + 1 = 0$:

Vi starter med at bestemme a og b ved at sammenligne med standardformen. Vi ser at $a = 2$ og $b = 1$.

Nu indsætter vi i formlen:

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$$

Vi har nu løst vores ligning!

For at omskrive en ligning, så den kommer på standardformen, bruger man typisk forskellige regneregler eller den mere præcise udgave af folkeskolemetoden, som vi beviste tidligere.

Løsning af andengradsligninger 3.2

I dette afsnit er det vores mål at udlede en løsningsformel for andengradsligninger

Hvad er en andengradsligning? 3.2.1

Definition: En ***andengradsligning*** er en ligning, som kan skrives på formen:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

$ax^2 + bx + c = 0$ kaldes standardformen for andengradsligninger.

Eksempler:

$2x^2+3x-7=0, \quad x^2=x+7, \quad \frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$

Før vi går i gang med at løse andengradsligninger, skal vi lige lære et nyt begreb, nemlig **koefficienter**:

$$2x^2-8x+6=0$$

↖ ↑ ↗

koefficienter

Bemærk, at **fortegnene hører med til koefficienterne**.

Følgende sætninger illustrerer korrekt brug af begrebet koefficient:

1. 'Koefficienten til x er -8.'
2. 'Koefficienten til højestegradsledet er 2'
3. 'Koefficienterne i ligningen er 2, -8 og 6

Løsningsformlen for andengradsligninger 3.2.2

Når vi skal løse andengradsligninger, bruger vi naturligvis vores generelle løsningsstrategi. Vi skal derfor lede efter en regneregel eller flere, der gør det muligt for os at skrive standardformen for andengradsligninger om til en simpel ligning.
Vi ser på standardformen $ax^2+bx+c=0$. Vi ser, at venstresiden minder om højresiden i første kvadratsætning. Specielt, hvis vi sætter x ind:

$$(x+\square)^2 = x^2 + 2\square x + \square^2$$

Vi får i hvert fald tre led på næsten den rette form og, vigtigst af alt: x optræder kun en gang på venstresiden. Venstresiden kan altså indgå i en simpel ligning. Vores plan er derfor: Vi skal finde ud af, **hvad vi skal gøre ved $(x+\square)^2$ for at det bliver lig med ax^2+bx+c**.

Vi mangler altså bare det sidste led. For at sørge for, at det sidste led, som i øjeblikket er $a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, bliver lig med c, lægger vi simpelthen forskellen mellem c og $a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ til og får:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = ax^2+bx+c\,.$$

Vi har altså indset, at standardformen for andengradsligninger kan skrives om til en simpel ligning:

$$ax^2+bx+c=0$$
$$\Updownarrow$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

Det er ganske vist en formelt 'simpel' ligning, men vi kan vist godt blive enige om, at den er kompliceret. Er man trænet i udpakningsmetoden kan man desuden se, at vi kommer til at få kvadratroden af noget grimt på grund af brøkerne. Inden vi går i gang med udpakningen, reducerer vi derfor venstresiden for at slippe af med brøkerne:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$= a\frac{(2ax+b)^2}{(2a)^2}+c-a\frac{b^2}{(2a)^2}$$
$$= \frac{(2ax+b)^2}{4a}+c-\frac{b^2}{4a}$$
$$= \frac{(2ax+b)^2+4ac-b^2}{4a}$$

Vi sætter alle tre led på en fælles brøkstreg.

Vi står altså nu med følgende simple ligning, der er ensbetydende med standardformen for andengradsligninger:

$$\frac{(2ax+b)^2+4ac-b^2}{4a}=0$$

Den løser vi ved udpakning:

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{(2ax+b)^2+4ac-b^2}{4a} & = & 0 \\
{}_{/4a}\uparrow & & \downarrow_{\cdot 4a} \\
(2ax+b)^2+4ac-b^2 & = & 0 \\
{}_{+(4ac-b^2)}\uparrow & & \downarrow_{-(4ac-b^2)} \\
(2ax+b)^2 & = & b^2-4ac \\
{}_{\cdot^2}\uparrow & & \downarrow_{\pm\sqrt{\cdot}} \\
2ax+b & = & \pm\sqrt{b^2-4ac} \\
{}_{+b}\uparrow & & \downarrow_{-b} \\
2ax & = & \pm\sqrt{b^2-4ac}-b \\
{}_{\cdot 2a}\uparrow & & \downarrow_{/2a} \\
x & = & \dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}
\end{array}$$

Vi har nu nået vores mål: En løsningsformel for andengradsligninger!

Af historiske årsager skriver vi den på følgende måde:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Hvorfor giver denne formel det samme som den formel, vi udledte? ▶ Løsning

Bemærk, at vi ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal og at kvadratroden af 0 er 0. I tilfælde af, at tallet under kvadratroden er negativt, har ligningen derfor ingen løsninger, og hvis det under kvadratoden er 0, er der kun en løsning. Da tallet under kvadratroden altså bestemmer antallet af løsninger, har man valgt at give det et navn: **diskriminanten**. Man bruger ofte D til at betegne diskriminanten.

Vi har altså nu bevist følgende sætning:

Sætning 2: Løsningsformlen for andengradsligninger er:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \qquad D=b^2-4ac.$$

Et hurtigt bevis

3.2.3

I sidste afsnit så vi, hvordan vi kan udlede løsningsformlen for andengradsligninger uden på forhånd at kende den. Når nu vi kender den, kan vi se, om vi kan finde et andet og forhåbentlig mindre besværligt bevis.

Undervejs i vores bevis kom vi frem til, at standardformen for andengradsligninger er ensbetydende med følgende simple ligning:

$$(2ax+b)^2 = D\,.$$

Når nu vi ved, at det er rigtigt, kan vi se om vi kan komme frem til den på en lettere måde end vores oprindelige. Ved at gange parentesen ud og indsætte vores formel for D, indser vi at vi bare kan gøre følgende:

$$\begin{array}{ccc} ax^2+bx+c & = & 0 \\ & \Updownarrow & \\ 4a^2x^2+4abx+4ac & = & 0 \\ & \Updownarrow & \\ 4a^2x^2+4abx+b^2 & = & D \\ & \Updownarrow & \\ (2ax+b)^2 & = & D \\ & \Updownarrow & \\ x & = & \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \end{array}$$

Vi pakker ud.

Differentialligninger 4

I dette afsnit skal vi se, hvordan udpakningsmetoden kan bruges til at løse de forskellige typer differentialligninger, du vil støde på i gymnasiet. Har du ikke i forvejen lært om differential- og integralregning, vil du ikke kunne forstå alt i afsnittet. Men det kan alligevel være interessant at se det igennem. Om ikke andet så for at se, at strukturen på alle udledningerne er den samme: Først omskriver vi til en simpel ligning og derefter pakker vi ud. Det eneste, du mangler, er altså de regneregler, der gør omskrivningen til en simpel ligning mulig.

Hvad er en differentialligning? 4.1

Definition:

En **differentialligning** er en ligning, hvor den ubekendte er en funktion og hvor den ubekendtes afledte indgår. En differentiallignings **orden** er det højeste antal gange den ubekendte er blevet differentieret.

Eksempler:

$y' = y$ ▶ Orden ?

$y' = x \cdot y^2$ ▶ Orden ?

$y'' = k \cdot y$ ▶ Orden ?

$y' \cdot y = y''' \cdot x$ ▶ Orden ?

Vi vil kun løse differentialligninger af første orden.

Der er tradition for, at bruge en lidt anden notation, når det gælder variablen (typisk y) i en differentialligning, end den man normalt bruger, når man arbejder med funktioner. Det drejer sig specielt om sammensatte funktioner, hvor vi normalt bruger symbolet $\circ$. **I stedet for fx $f \circ y$ skriver man $f(y)$**, hvilket strengt taget er et problem, da det symbol også kan læses som 'f gange y'. I praksis giver det kun sjældent anledning til problemer, men for en sikkerheds skyld, bruger vi konsekvent " · ", når y indgår i en produktfunktion.

Løsning af differentialligninger 4.2

Vores første differentialligninger 4.2.1

I afsnittet om andengradsligninger så vi, hvordan første kvadratsætning gjorde det muligt for os at løse andengradsligninger. Årsagen til, at den kunne det, var, at den 'laver et x om til to x'er', altså, at x kun optræder en gang på den ene side af lighedstegnet, men to gange på den anden.

Ser vi på de regneregler, vi udledte i differentialregning, så opdager vi to med samme egenskab:

$$\text{Diff. af sammensat funktion :} \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$
$$\text{Diff. af produktfunktion :} \quad (f \cdot g)' = f' g + f g'$$

Vi kan altså bruge de to regler, når vi ønsker at slippe af med en forekomst af y. I de to næste afsnit kommer vi til at se, hvordan den præcis samme strategi, som vi brugte til at løse andengradsligninger, kan bruges til at løse differentialligninger.

Øvelse

Bevis følgende resultat:

Lemma: (Hjælpesætning)

Lad f være en differentiabel funktion og g være en kontinuert funktion. Så gælder:

1. $f(y) \cdot y' = g \iff y = (\oint f)^{-1} \circ \int g$

2. $f' \cdot y + f \cdot y' = g \iff y = \dfrac{\int g}{f}$

Bemærk at vi bruger følgende notation:

$$\int f = \text{alle stamfunktioner til } f.$$
$$\oint f = \text{en stamfunktion til } f.$$

▶ **Løsning**

Separable differentialligninger

4.2.2

I dette afsnit ser vi, hvordan vi kan løse separable differentialligninger.

Hvad er en separabel differentialligning?

D e f i n i t i o n :

En **separabel** differentialligning er en ligning, der kan skrives på følgende form:

$$y' = P \cdot Q(y),$$

hvor P og Q er kontinuerte funktioner og Q aldrig er 0.

Løsningsformel for separable differentialligninger

For at løse de separable differentialligninger opdager vi, at vi bare skal adskille (separere) alle y'er på den ene side af lighedstegnet. Det gør vi ved at ▶ dividere på begge sider med $Q(y)$:

$$y' = P \cdot Q(y)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{y'}{Q(y)} = P$$

Nu kan vi nemlig bruge vores definition af division til at indse, at venstresiden er en funktion på formen $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

Hvad er f og g? ▶ Løsning

Ved indsættelse og efterfølgende udpakning får vi følgende:

Sætning:

Løsningsformlen for separable differentialligninger er:

$$y = \left(\oint \frac{1}{Q}\right)^{-1} \circ \int P.$$

▶ **Kort bevis**

Tabel over $\left(\oint \frac{1}{Q}\right)^{-1}$

Når man skal bruge løsningsformlen er følgende tabel nyttig:

Q	$\left(\oint \frac{1}{Q}\right)^{-1}$
1	id
id	$\pm e^{\cdot}$
$\cdot^2$	$-\frac{1}{\cdot}$
$\cdot\,(M-\cdot)$	$\frac{M}{\pm e^{-M\cdot}+1}$

Udledningen af de første tre sker i øvelserne sidst i afsnittet og den sidste bliver bevist undervejs i løsningen af den logistiske ligning.

> **Eksempel:**
>
> Vi løser følgende differentialligning:
>
> $$y' = k\cdot y$$
>
> Vi sætter $P = k$ og $Q = \mathrm{id}$. Formlen giver derfor efter et tabelopslag løsningerne:
>
> $$f(x) = y = (\pm e^{\cdot})\circ(kx+c) = \pm e^{kx+c} = C\cdot e^{kx} \quad , C \in \mathbb{R}.$$

En praktisk metode (Klassisk separation af de variable)

Det er ikke altid let at bestemme $\left(\oint \frac{1}{Q}\right)^{-1}$. Derfor kan følgende ▶ mellemtrin være praktisk:

$$\left(\oint \frac{1}{Q}\right)(y) = \int P.$$

Hvis vi kalder y's uafhængige variabel for x, er det den klassiske formulering af 'løsningsformlen' for separable differentialligninger.

> **Sætning:** ***(Klassisk sep. var.)***
>
> Løsningerne til en separabel differentialligning er de samme som løsniningerne til følgende ligning:
>
> $$\oint \frac{1}{Q(y)}\,d\,y = \int P(x)\,d\,x.$$

▶ **Bemærkning:**

I sætningen bruger vi vores definition af integration mht. en funktion.

Øvelser

Udled de første tre rækker i tabellen over $\left(\oint \frac{1}{Q}\right)^{-1}$ ved at bevise følgende:

1. $\left(\oint \frac{1}{1}\right)^{-1} = \mathrm{id}$
2. $\left(\oint \frac{1}{\mathrm{id}}\right)^{-1} = \pm e^{\cdot}$
3. $\left(\oint \frac{1}{\cdot^2}\right)^{-1} = -\frac{1}{\cdot}$

Lineære differentialligninger af 1. orden. 4.2.3

I dette afsnit ser vi, hvordan vi kan bruge udpakningsmetoden til at løse lineære differentialligninger af første orden.

Hvad er en lineær differentialligning af første orden?

> **Definition:**
>
> En **lineær** differentialligning **af første orden** er en ligning, der kan skrives på følgende form:
>
> $$y' + P\cdot y = Q,$$
>
> hvor P og Q er kontinuerte funktioner.

Løsningsformel for lineære differentialligninger af første orden

Da vi løste andengradsligninger tog vi udgangspunkt i den af vores regneregler, der mindede mest om venstresiden af standardformen for andengradsligninger, nemlig første kvadratsætning. Derefter så vi, hvad vi skulle gøre ved regnereglen for at den blev lig med venstresiden i standardformen.

Vi gør præcis det samme nu: Vi tager udgangspunkt i regnereglen for differentiation af produktfunktioner:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

fordi det er den, hvis højreside minder mest om venstresiden i standardformen $y' + P \cdot y = Q$. Specielt, hvis vi sætter $f = y$ (ligesom vi satte x ind i første kvadratsætning):

$$(y \cdot \square)' = y' \cdot \square + y \cdot \square'.$$

Ligesom for andengradsligninger spørger vi os selv: Hvad skal vi gøre ved $(y \cdot \square)'$ for at få venstresiden i standardformen?

Hvis vi ser på første led $(y' \cdot \square)$, er det klart, at der er et $\square$ for meget. Det kan vi slippe af med ved at dividere med $\square$:

$$\frac{(y \cdot \square)'}{\square} = y' + y \cdot \frac{\square'}{\square}.$$

Nu passer første led altså. Hvis vi nu ser på andet led $\left(y \cdot \frac{\square'}{\square}\right)$, der jo gerne skulle være lig med $P \cdot y$, så kan vi regne ud, hvad $\square$ skal være.

▶ Hvad skal $\square$ være?

Vi har nu skrevet standardformen $y' + P \cdot y = Q$ for lineære differentialligninger af første orden om til en simpel ligning:

$$\frac{\left(y \cdot e^{\oint P}\right)'}{e^{\oint P}} = Q$$

Vi kan derfor finde løsningsformlen ved udpakning. Gør det!

Resultatet er:

Sætning:

Løsningsformlen for lineære differentialligninger af første orden er:

$$y = \frac{\int Q e^{\oint P}}{e^{\oint P}}$$

▶ **Kort bevis**

En praktisk metode til løsning af første ordens lineære differentialligninger

Sommetider er det let at gætte en løsning til en 1. ordens lineær differentialligning, men svært at finde alle løsninger, fordi integralet i løsningsformlen er for svært at bestemme. I den situation er følgende omskrivning af løsningsformlen nyttig:

$$y = \frac{\int Q e^{\oint P}}{e^{\oint P}} = \frac{\oint Q e^{\oint P} + c}{e^{\oint P}} = \frac{\oint Q e^{\oint P}}{e^{\oint P}} + \frac{c}{e^{\oint P}} = y_0 + c e^{-\oint P} \quad , \ c \in \mathbb{R}.$$

Man skal altså bare lægge $c e^{-\oint P}$ til sin løsning (y_0) for at bestemme alle løsninger.

Bemærk, at $c e^{-\oint P}$ er den fuldstændige løsning til den såkaldte 'homogene ligning' (den hvor $Q = \mathbf{0}$):

$$y' + P \cdot y = 0.$$

Logistiske ligninger

4.2.4

I dette afsnit ser vi, hvordan vi kan løse logistiske ligninger ved brug af separation af de variable og udpakningsmetoden.

Hvad er en logistisk differentialligning?

Definition:

En **logistisk** differentialligning er en ligning, der kan skrives på følgende form:

$$y' = ay(M-y),$$

hvor a og M er konstanter.

Løsningsformel for logistiske ligninger

Ud fra definitionen ser vi, at logistiske ligninger er separable med $P = a$ og $Q = \cdot\,(M - \cdot)$. Vi kalder y's uafhængige variabel for x, bruger klassisk separation af de variable og pakker efterfølgende ud:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & y' & = & ay(M-y) & & \\
 & & & \Updownarrow & & & \\
 & & \oint \frac{1}{y(M-y)}\,dy & = & \int a\,dx & & \\
 & & & \Updownarrow & & & \\
-\ln\left|\frac{M}{y}-1\right| & =^{*} & \oint \frac{M}{y(M-y)}\,dy & = & \int Ma\,dx & = & Max + c \quad , c \in \mathbb{R} \\
-\diamond \uparrow & & & & & & \downarrow -\diamond \\
\ln\left|\frac{M}{y}-1\right| & & & = & & & -Max - c \quad , c \in \mathbb{R} \\
\ln \uparrow & & & & & & \downarrow e^{\diamond} \\
\left|\frac{M}{y}-1\right| & & & = & & & e^{-Max-c} \quad , c \in \mathbb{R} \\
|\diamond| \uparrow & & & & & & \downarrow \pm\diamond \\
\frac{M}{y}-1 & & & = & & & ke^{-Max} \quad , k \in \mathbb{R} \\
-1 \uparrow & & & & & & \downarrow +1 \\
\frac{M}{y} & & & = & & & ke^{-Max}+1 \quad , k \in \mathbb{R} \\
\cdot M \uparrow & & & & & & \downarrow /M \\
\frac{1}{y} & & & = & & & \frac{ke^{-Max}+1}{M} \quad , k \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{\diamond} \uparrow & & & & & & \downarrow \frac{1}{\diamond} \\
y & & & = & & & \frac{M}{ke^{-Max}+1} \quad , k \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{*}\oint \frac{M}{y(M-y)}\,dy &= \oint \frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}\,dy = \ln|y| - \ln|M-y| = \ln\left|\frac{y}{M-y}\right| \\
&= \ln\left|\frac{1}{M/y-1}\right| = \ln 1 - \ln\left|\frac{M}{y}-1\right| = -\ln\left|\frac{M}{y}-1\right|
\end{aligned}
$$

Vi har altså nu vist følgende sætning:

S æ t n i n g :

Løsningsformlen for logistiske differentialligninger er:

$$y = \frac{M}{ke^{-Max}+1} \quad , \; k \in \mathbb{R}$$

Af: Jan Agentoft Nielsen, lektor, ph.d. - Rødkilde gymnasium

version: 15.01.12