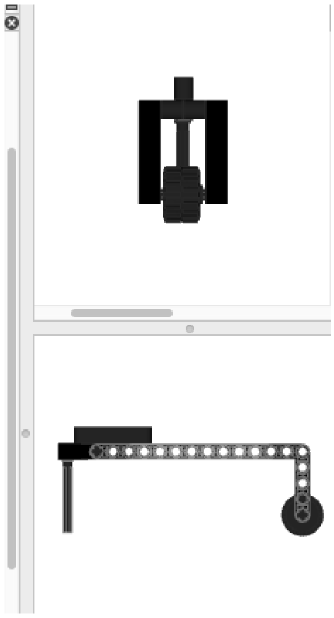
## Planimeter

I dette projekt skal du lave dit eget apparat til at bestemme arealer. Et sådant apparat kaldes et planimeter.

### Konstruktion

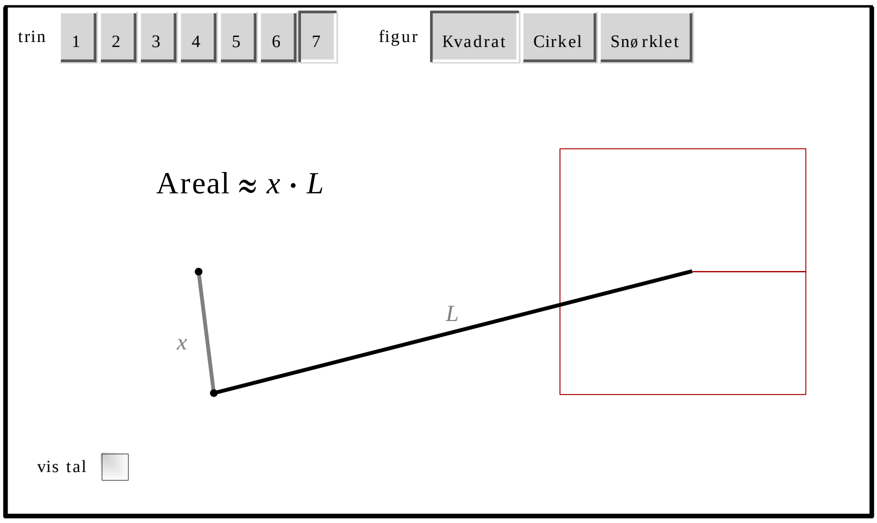
Find dit LEGO frem og byg noget, der minder om følgende:



Din figur behøver ikke ligne den på billedet ret meget. Det eneste vigtige er et gummihjul, der peger hen mod en spids.

### Brug

1. Tegn et område på et stykke papir, som ikke er bredere end planimeteret.
2. Tegn en streg fra midten af området og ud til et sted på kanten af området.
3. Sæt spidsen af dit planimeter i midten af området og tegn et punkt ved hjulets placering.
4. Før spidsen langs med linjen ud til kanten af området, hele vejen langs kanten af området og tilbage langs linjen til midten af området.
5. Tegn et punkt ved hjulets nye placering.
6. Mål afstanden mellem de to punkter, du har tegnet, og gang den med længden af dit planimeter (altså afstanden mellem hjulet og spidsen).
7. Resultatet er med god tilnærmelse lig med arealet af området!




### Forklaring

Forklaringen på, hvorfor vores planimeter virker, kan skrives ultra kort på følgende måde:

$$A = A - B = A_{\text{overstrøget}} = \text{rotation} \cdot L = x \cdot L$$

Hver del bliver forklaret og vist i det følgende:

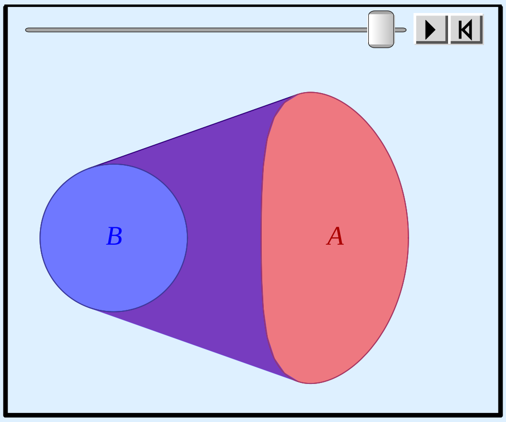
**1.** Først viser vi, at det areal, som planimeteret stryger over, er lig med det areal $A$, vi ønsker at bestemme, minus arealet $B$ af et andet område.

$$A - B = A_{\text{overstrøget}}$$

**Forklaring**

I stedet for planimeteret med dets hjul og særlige bevægelse, ser vi først på en mere generel situation: Vi ser på en pind, der bevæges rundt på en plan flade og tilbage til udgangspositionen. Vi vil interessere os for arealet af det område, som pinden bevæger sig over.

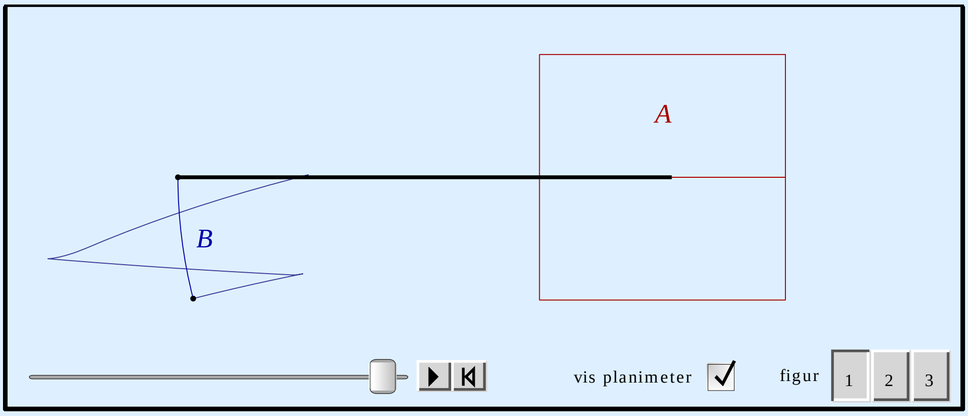
Hvis pinden bevæger sig over et område i én retning, betragter vi arealet som positivt, mens hvis pinden bevæger sig over området i den modsatte retning, så betragter vi arealet som negativt. Idéen er illustreret på figuren nedenfor, hvor vi kan tænke på det blå areal (der hvor pinden bevæger sig nedad) som negativt og det røde areal (der hvor pinden bevæger sig opad) som positivt.




Da pinden bevæger sig i begge retninger henover det lilla område, bidrager det område ikke til det samlede areal, fordi arealet af det både bliver lagt til og trukket fra. Det samlede areal bliver derfor arealet af det røde område minus arealet af det blå område. Altså:

$$A_{\text{overstrøget}} = A - B$$

Vi vil gerne bruge dette resultat til at forstå, hvorfor vores planimeter virker. Men vi har et problem: Planimeteret vender ikke tilbage til udgangspositionen efter at spidsen har bevæget sig rundt. Hjulet har flyttet sig, når spidsen vender tilbage til midten af området. Men vi kan tvinge planimeteret tilbage til udgangspositionen ved at holde spidsen fast og flytte hjulet tilbage til startpunktet (langs cirkelbuen med radius $L$ og centrum i midten af området). Det er illustreret på følgende figur, hvor man også kan se hjulets bane:

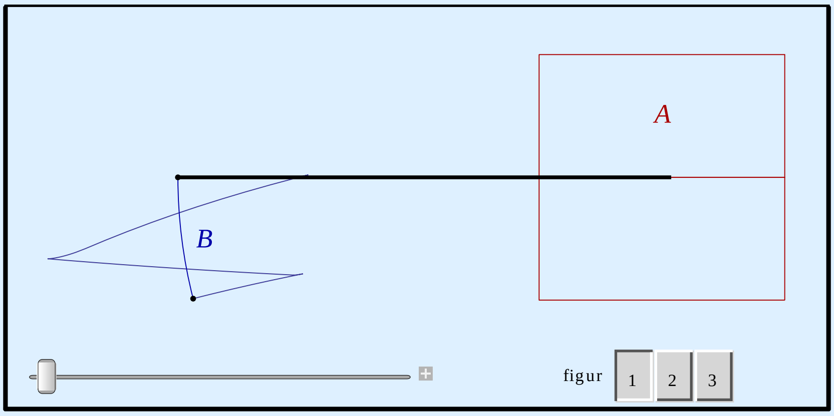



**2.** Så viser vi, at $B = 0$, hvilket medfører, at det overstrøgne areal er lig med det areal, vi ønsker at bestemme.

$$A = A - B$$

**Forklaring**

Vi ser på, hvordan vores planimeter bevæger sig hen over område $B$:




Ved at flytte på skyderen, kan man se, at det store blå trekantede område i alt overstryges en gang nedad og de to små trekanter i alt overstryges en gang opad. Så hvis de to små trekantede områder tilsammen er lige så store som det store trekantede område, så er $B = 0$!

Det er klart, at der må findes et punkt inde i området, som opfylder, at hvis man starter der, så giver hjulets bane et område, hvis areal er nul. Det vil føre for vidt at undersøge præcis, hvor det punkt befinder sig, men i praksis er det fornuftigt at stræbe efter at starte i midten af området, da det typisk resulterer i, at områdets areal bliver tæt på nul.

Vi har altså vist, at med et korrekt valg af midtpunkt, så er

$$B = 0,$$

hvormed

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$$

**3.** Derefter viser vi, at det overstrøgne areal er lig med længden, som et nyt hjul placeret på planimeteret drejer rundt, ganget med længden af planimeteret.

$$A_{\text{overstrøget}} = \text{rotation} \cdot L$$

**Forklaring**

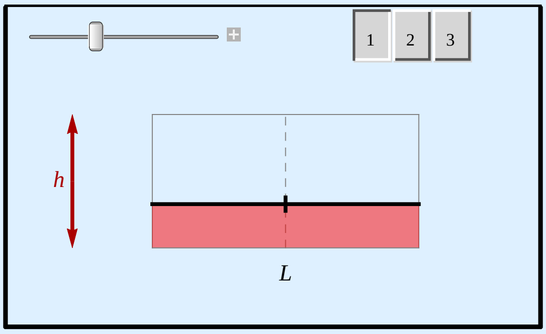
Vi har indtil nu indset, at det areal, vi ønsker at bestemme, $A$, er lig med det samlede areal, som planimeteret bevæger sig over. I dette afsnit er det vores mål, at finde en smart måde at bestemme dette areal.

Vi ser igen på en vilkårlig pind, da planimeterets hjul ikke har nogen betydning for argumentet.

Idéen er, at sætte et hjul på pinden. Hjulet skal sidde vinkelret på pinden, så det kun kan rulle vinkelret på pindens retning (altså vinkelret på vores planimeters hjul).

Det smarte ved at sætte hjulet på den måde er, at man kan bestemme arealet af området, som pinden har bevæget sig over, ved at aflæse, hvor meget hjulet har drejet. For at se hvordan hjulets rotation kan bruges til at bestemme arealer, ser vi på to forskellige måder at bevæge pinden på: **1.** Forskydning parallelt med udgangspositionen og **2.** Rotation om en af enderne.

**1.** Hvis man flytter sin pind, så den hele tiden er parallel med udgangspositionen, overstryger pinden et område med form som et af dem i følgende figur:



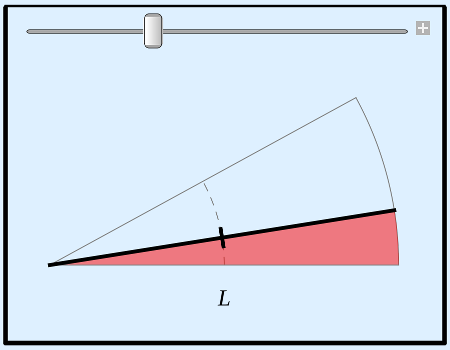

Ved at tænke på områderne som bestående af en masse vandrette linjestykker, kan man overbevise sig om, at de tre områder har samme areal, fordi linjestykkerne kan forskydes vandret uden at ændre på arealet. De har derfor alle samme areal som rektanglet, nemlig:

$$\mathbf{Areal} = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{L}$$

Da hjulet kun registrerer bevægelse vinkelret på pinden og dermed ikke registrerer bevægelsen sidelæns, er hjulets samlede rotation lig med højden af området. Vi skal derfor blot gange hjulets samlede rotation med pindens længde for at bestemme arealet af det overstrøgne område. Altså:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{forskydning}} = \mathbf{rotation} \cdot \boldsymbol{L}$$

**2.** Hvis man drejer pinden omkring et af dens endepunkter, får man følgende




Hjulets rotation er dermed lig med længden af den stiplede buelængde. Kalder vi hjulets afstand fra endepunktet for $l$, så er hjulets rotation derfor givet ved:

$$\text{rotation} = l \cdot \frac{\text{vinkel}}{360°}$$

Vi kan nu udtrykke det overstrøgne areal ved hjulets rotation:

$$A_{\text{rotation}} = \pi L^2 \cdot \frac{\text{vinkel}}{360°} = \pi L^2 \cdot \frac{\text{rotation}}{l} = \text{rotation} \cdot \text{konstant}$$

Det overstrøgne areal er derfor proportionalt med hjulets rotation.

Det viser sig, at man kan betragte enhver bevægelse af en pind som en kombination af en rotation og en forskydning, og at man kan betragte hver del for sig, så vi altså kan tænke på det samlede overstrøgne areal som summen af det samlede arealet fra forskydninger og det samlede areal fra rotationer. Altså

$$A_{\text{overstrøget}} = A_{\text{forskydning}} + A_{\text{rotation}}$$

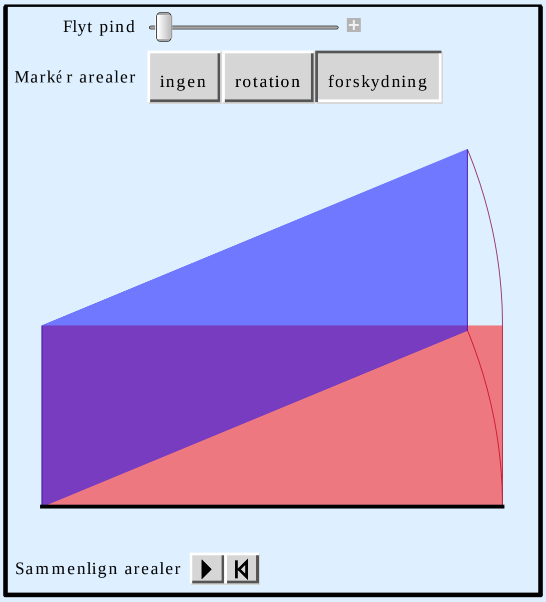
Det vil føre for vidt at dykke ned i detaljerne i dette, men man kan forestille sig, at man deler en bevægelse ind i 'uendeligt' små skridt, hvor man i hvert skridt enten roterer eller forskyder.

Hvis vi nu igen tænker på en pind, som flyttes rundt og tilbage til udgangspunktet, så bliver den samlede rotation lig med nul! Pinden bliver drejet undervejs, men for at komme tilbage til udgangspunktet, bliver den nødt til at blive drejet tilbage. Derfor er $A_{\text{rotation}} = 0$ og hjulets rotation på grund af pindens rotation er også nul, fordi $A_{\text{rotation}}$ er proportional med hjulets rotation.

Efter hele bevægelsen er det overstrøgne areal dermed lig med det samlede areal fra forskydning, og al rotation af hjulet skyldes kun forskydning. Vi har altså:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{overstrøget}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{forskydning}} = \mathbf{rotation} \cdot \boldsymbol{L}$$

Den opmærksomme læser undrer sig måske over, hvorfor bidraget fra forskydning af pinden ikke bliver nul, når pinden vender tilbage til udgangspunktet, når bidraget fra rotation af pinden gør. Det skyldes, at forskydningsarealet ændrer sig, når pinden drejes. Det er illustreret på følgende figur:




**4.** Dernæst viser vi at det nye hjuls rotation er lig med længden $x$ af et buestykke.

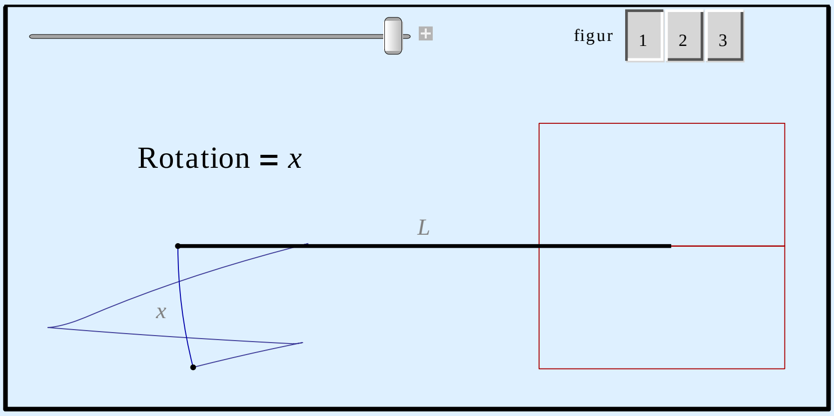
$$\text{rotation} = x$$

**Forklaring**

Vi har indtil nu indset, at det areal som en pind stryger over, er lig med længden af pinden ganget med rotationen af et hjul, som er placeret vinkelret på pinden.

Vi tager nu en pind med samme længde som vores planimeter og sætter et hjul fast samme sted som hjulet på vores planimeter, men drejet 90 grader, så det i stedet for at pege hen mod spidsen peger vinkelret på den. Vi flytter nu pinden på præcis samme måde som vores planimeter og holder øje med rotationen af hjulet.

Da hjulet på planimeteret forhindrer enhver forskydning vinkelret på pinden, så registrerer hjulet ingen rotation mens den anden ende af pinden bevæger sig. Først når vi flytter hjulenden op til udgangspunktet, drejer hjulet rundt. Hjulet roterer derfor længden af buestykket $x$ på figuren nedenfor:




Det ønskede areal er derfor præcis $x \cdot L$, hvis vi har valgt et punkt i området, så det blå område har areal nul.

Til sidst konkluderer vi det ønskede:

$$A = x \cdot L$$

**Forklaring**

Vi har nu givet mening til og vist hver del af udsagnet fra begyndelsen af afsnittet:

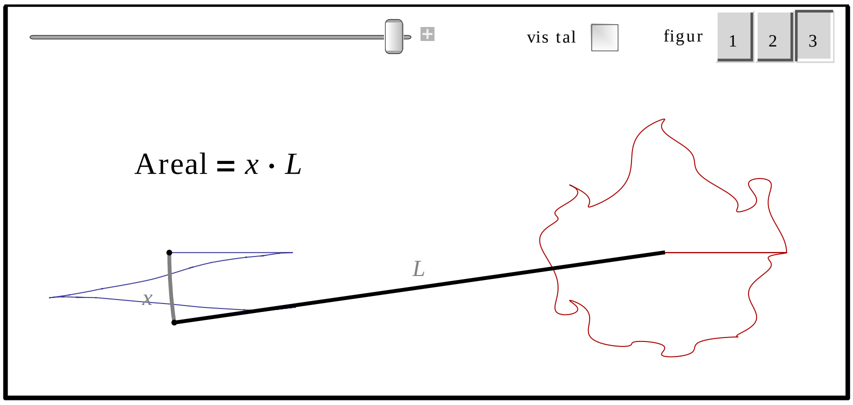
$$A = A - B = A_{\text{overstrøget}} = \text{rotation} \cdot L = x \cdot L$$

Vi har derfor vist det ønskede:

$$A = x \cdot L$$

Undervejs har vi indset, at ligheden kun holder, hvis man vælger midten af området på en måde så $B = 0$, og hvis man måler afstanden mellem hjulets start- og slutpunkt langs cirkelbuen med centrum i det valgte midtpunkt og ikke langs den rette linje, som vi gjorde.

Begge dele giver anledning til usikkerhed, når man bruger planimeteret i praksis, men hvis området ikke er alt for stort i forhold til længden af planimeteret, er længden af den rette linje en god tilnærmelse til længden af cirkelbuen, og hvis man starter i områdets massemidtpunkt er $B$ meget tæt på nul. Usikkerheden forbundet med at følge kanten af området bliver så den primære årsag til usikkerhed.




**Af: Jan Agentoft Nielsen, lektor, ph.d. - Rødkilde gymnasium**

**version: 14.12.21**